b) $p+q=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}$ or $a+b+c=0$ d'où $a+b=-c$ et par suite $p+q=\dfrac{-c}{c}=-1$

2°/ Soit $p=x+yi$

On a : $|p|=1\Leftrightarrow|x+yi|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

On a : $|q|=1$ or $q=-1-p$ (d'après 1°/ b))

donc $|-1-p|=1\Leftrightarrow|1+p|=1\Leftrightarrow|1+x+yi|=1\Leftrightarrow(1+x)^2+y^2=1$

On a : $\begin{cases}x^2+y^2=1\\(1+x)^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1-x^2 & (1)\\(1+x)^2+1-x^2=1 & (2)\end{cases}$

(2) : $\Leftrightarrow 1+2x+x^2+1-x^2=1\Leftrightarrow 2x=-1$ d'où $x=-\dfrac{1}{2}$

$x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y^2=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ d'où $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Conclusion : $p=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $p=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B - 1°/ Pour montrer que O est le centre de gravité du triangle ABC, il suffit de prouver que : $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}$ c'est à dire $(z_A-z_O)+(z_B-z_O)+(z_C-z_O)=a+b+c=0$ (d'après les données) d'où O est le centre de gravité de ABC.

2°/ $OA=|z_A-z_O|=|a|$

$OB=|z_B-z_O|=|b|=|a|$

$OC=|z_C-z_O|=|c|=|a|$

On a : $OA=OB=OC$ donc A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

Solution 6 :

1°/ $\overline{W}=b\overline{c}-\overline{b}c=-W$ donc W est un nombre imaginaire pur.

2°/ $t=\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{(b+c)(\overline{b}-\overline{c})}{(b-c)(\overline{b}-\overline{c})}$ Or $(b-c)(\overline{b}-\overline{c})=(b-c)(\overline{b-c})=|b-c|^2$

$(b+c)(\overline{b}-\overline{c})=b\overline{b}-b\overline{c}+\overline{b}c-c\overline{c}=|b|^2+W-|c|^2$ or $|b|=|c|$ donc

$(b+c)(\overline{b}-\overline{c})=W$ et par suite $t=\dfrac{W}{|b-c|^2}$ d'où t est un nombre imaginaire pur.